Concursul de matematică Arhimede

Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a III-a

I. Aflați cea mai mică sumă de forma

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

în care s-au folosit doar cifrele 0, 1, 2, 4, 5, 6 o singură dată. Arătați variantele posibile.

II. **a)** Puneți paranteze astfel încât să obțineți un număr cât mai mic: $100-30+50-2+10$.

b) Reconstituiți adunarea:

$$\overline{ABC}+\overline{BC}+C=\overline{4A5}$$

III. Se dă suma:

3 + 5 + 7 + 13 + 15 + 17 + 22 + 24 + 26 + 34 + 36 +38

a) Calculați suma grupând convenabil termenii.

b) Dacă înlocuim un semn „+” cu un semn „–” se obține rezultatul 210. În fața cărui număr din sumă s-a pus semnul „–” ?

IV. La un concurs „Cine ştie câştigă”, cei 2 finalişti, răspund corect la cele 3 întrebări; ei au ales întrebări ce valorează 1 punct, 5 puncte sau 10 puncte. Primul a realizat un scor de trei ori mai mare decât al doilea. Care este diferența de punctaj dintre ei ?

Punctaj: **I.** 9p; **II.** a) 4p; b) 5p; **III.** a) 4p; b) 5p; **IV.** 9p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: $1^{h}\ 30^{min}$.

Concursul de matematică Arhimede
Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a IV-a

I. Efectuați calculele:

a) $A = 0\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5 + 6\cdot 7 + 8\cdot 9$

$B = (2 + 2\cdot 2) + 2 : 2$

b) 3 + 5 + 7 + … + 2007 – 2 – 4 – 6 – … – 2006.

II. Scrie un număr de 3 cifre care adunat cu răsturnatul său, să dea 1009. Care este cel mai mare număr cu această proprietate? Câte astfel de numere există?

III. Aflându-se la bunici, Ionel vrea să numere păsările din curte. El observă că le poate grupa astfel încât la 5 găini să corespundă 2 rațe, iar la 3 rațe să corespundă o gâscă. Ştiind că în curte erau 92 de păsări, aflați câte păsări de fiecare fel sunt în curte.

IV. Calculați:

$(\overline{xyzt} + \overline{mnuv}) : 5$

ştiind că:

$\overline{xn} + \overline{my} = 81$ şi

$\overline{zv} + \overline{ut} = 125$

Punctaj: **I.** a) 4p; b) 5p; **II.** 9p; **III.** 9p; **IV.** 9p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: $1^{h}\ 30^{min}$.

Concursul de matematică Arhimede
Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a V-a

I. Calculați:

a) $2+2\cdot[2+2\cdot(222-37\cdot 6)]$

b) $135\cdot 75-135\cdot 65+65\cdot 124-114\cdot 65$

c) $7218:18-9867:23:13$

Revista Arhimede

II. **1)** Un număr este cu 2006 mai mare decât altul. Dacă împărțim suma lor la diferența lor, obținem câtul şi restul egale cu 2. Să se afle numerele.

Cristina Godeanu

2) Reconstituiți adunarea:

$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2604$

Iolanda Ionescu, Iulian Gogoaşă

III. Să se determine numărul x dacă suma cifrelor sale este y, suma cifrelor numărului y este z şi $x+y+z=60$.

Revista Arhimede

IV. Să se afle câte numere naturale A de trei cifre au proprietatea că putem găsi un număr natural B astfel încât numărul $A-B$ să aibă două cifre iar numărul $A+B$ să aibă patru cifre.

Preda Traian

Punctaj: **I.** a) 3p; b) 3p; c) 3p; **II.** 1) 5p; 2) 4p; **III.** 9p; **IV.** 9p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 2 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a VI-a

I. **1.** Se dau numerele:

$$a = \left(10^2 + 9^2 + 8^2\right) : 7^2 + \left(5^2 - 3^2\right) : 2^2 \text{ şi } b = 2000 : 10 + \left(3^4 + 3^3\right) : 3^2 + 3^2 + 2^2$$

Să se afle cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

2. Să se arate că numărul: $2^{n+3} \cdot 3^n + 6^{n+2} - 2^n \cdot 3^{n+1}$ este divizibil cu 41 pentru orice $n \in N$.

Revista Arhimede

II. **1)** Să se determine cel mai mic şi cel mai mare număr de forma $\overline{abab}$ (scris în baza 10), cu număr minim de divizori.

Dan Nedeianu

2) Determinați $n \in N$ pentru care:

a) $\frac{3}{5} < \frac{n}{12} < \frac{11}{15}$

b) $\frac{14}{29} < \frac{6}{n} < \frac{7}{12}$

3) Suma dintre cel mai mic multiplu comun şi cel mai mare divizor comun a două numere naturale este 101. Să se afle numerele.

Sorin Rădulescu

III. Fie punctele coliniare $A_1, A_2, ..., A_{20}$, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1mm$, $A_2A_3 = 2mm$, $A_3A_4 = 3mm$ şi aşa mai departe.

a) Ce lungime are segmentul $A_{19}A_{20}$?

b) Determinați lungimea segmentului A_1A_{20} în cm.

c) Dacă M este mijlocul segmentului A_1A_{20} şi N mijlocul segmentului A_2A_{19}, calculați lungimea segmentului MN.

IV. Se consideră unghiurile AOB şi BOC astfel încât $m(\angle AOB) = \overline{ab}$ grade, $m(\angle BOC) = \overline{bc}$ grade şi $m(\angle MON) = \overline{ac}$ grade unde a, b, c sunt cifre distincte iar $[OM$ şi $[ON$ sunt bisectoarele $\angle AOB$ respectiv $\angle BOC$.

1. Să se determine a, b, c.

2. Să se afle $m(\angle AOC)$.

Preda Traian

Punctaj: **I.** 1) 5p; 2) 4p; **II.** 1) 3p; 2.a) 2p; 2.b) 2p; 3) 2p; **III.** a) 3p; b) 3p; c) 3p; **IV.** 1) 4p; 2) 5p.
Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 2 ore.

Concursul de matematică Arhimede

Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a VII-a

I. **a)** Se consideră numerele:

$A=(1-30)(2-30)\cdot........\cdot(a-30)$

$B=(-1)^1(-1)^2...(-1)^a$ şi $C=(-1)^1+(-1)^2+...+(-1)^a$ cu $a\in N^*$.

i) Pentru $a=15$ ordonați crescător numerele A,B,C.

ii) Pentru $a=2007$ ordonați descrescător numerele A,B,C.

Cristian Olteanu

b) Fie $\overline{0,a_1a_2...a_n...}$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{6}+\frac{1}{13}$. Determinați a_{2006} şi $a_1+a_2+...+a_{2006}$.

Damian Marinescu

II. **a)** Să se găsească $n\in Z$ astfel încât $n+2\,|\,n^2+3$.

Liviu Oprişescu

b) Să se demonstreze că singurele numere raționale care verifică egalitatea:

$a+a^3+a^5=a^2+a^4+a^6$ sunt 0 şi 1.

Sorin Rădulescu, Adrian Turcu

III. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi E un punct pe (BC) astfel încât $[AB]\equiv[BE]$, $[EC]\equiv[DC]$ şi măs $\angle AED=90^\circ$.

a) Arătați că AB şi CD sunt paralele.

b) Dacă M este mijlocul segmentului AD, atunci măs $\angle BMC=90^\circ$.

Diana Niculescu

IV. În triunghiul isoscel $ABC(AB\equiv AC)$ notăm cu C' piciorul înălțimii din $C(C'\in AB)$ şi cu M mijlocul laturii AB. Să se determine măsurile unghiurilor ΔABC ştiind că $BC=2\cdot C'M$.

Titu Zvonaru

Punctaj: **I.** a)i) 2p; a)ii) 3p; b) 4p; **II.** a) 5p; b) 4p; **III.** a) 5p; b) 4p; **IV.** 9p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede

Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a VIII-a

I. **a)** Aflați toate numerele naturale $\overline{xy}$ pentru care $\sqrt{\frac{\overline{xy}+12}{\overline{xy}-12}} \in N$

Gh. Cristescu

b) Determinați numerele reale x, y, z care verifică egalitatea:

$(x+y-2)^2 + \sqrt{z-x-y} + |2x-y+3| = 0$

II. **a)** Fie a, b numere reale nenule astfel încât numerele ab, $\frac{a}{b}$ şi a^3+b^3 să fie toate raționale.

Demonstrați că a şi b sunt, de asemenea, numere raționale.

b) Fie $a, b \in Z$ şi numerele

$X = 7a^3 + 3b^2 + 2a$, $\quad Y = 5b^3 + 3a^2 - 2b$

Demonstrați că: $X \vdots 6$ numai dacă $Y \vdots 6$.

Dan Nedeianu

III. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră O, centrul bazei $ABCD$ şi M, centrul feței $BCC'B'$.

a) Demonstrați că $OM \parallel (AB'D')$.

b) Determinați măsura unghiului format de dreptele OM şi AD'.

c) Arătați că planele (OMB) şi $(AB'D')$ sunt paralele.

Godeanu Cristina

IV. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară şi punctele $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$, $C' \in (VC)$. Notăm:

$AB' \cap A'B = \{M\}$; $\quad BC' \cap B'C = \{N\}$; $\quad CA' \cap AC' = \{P\}$ şi $VM \cap AB = \{M'\}$, $VN \cap BC = \{N'\}$, $VP \cap AC = \{P'\}$.

Să se demonstreze echivalența următoarelor afirmații:

a) $(MNP) \parallel (A'B'C')$

b) M', N', P' sunt mijloacele laturilor AB, BC respectiv AC.

Preda Traian

Punctaj: **I.** a) 4p; b) 5p; **II.** a) 5p; b) 4p; **III.** a) 3p; b) 3p; c) 3p; **IV.** a) 5p; b) 4p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede

Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a IX-a

I. Să se arate că:

1) Orice număr rațional se scrie ca diferența a două pătrate de numere raționale.

2) Pentru orice număr întreg a există x,y,z numere întregi cu proprietatea

$3a^2 + 3a = x^3 + y^3 + z^3$

Marius Drăgan

II. Fie x,y,z numere reale nenule astfel încât $x + y + z \geq 3$ şi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$. Să se demonstreze că:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

b) $\frac{1}{3 - x^2} + \frac{1}{3 - y^2} + \frac{1}{3 - z^2} \geq \frac{3}{2}$

Ştefan Smarandache

III. Fie x un număr real. Să se arate că:

1) Dacă există $n \in \mathrm{N}^*$ cu proprietatea că $x^{n^2} \in Q$ şi $x^{(n+1)^2} \in Q$ atunci $x \in Q$.

2) Există $x \in R \setminus Q$ cu proprietatea că $x^{n^2+n} \in Q$ $(\forall)$ $n \in N^*$.

3) Dacă $a, b, c \in N^*$ $(a + b, c) = 1$ şi $x^{an^2+bn+c} \in Q$ $(\forall)$ $n \in N^*$ atunci $x \in Q$.

Sorin Rădulescu, Adrian Troe

IV. Să se determine valoarea maximă a parametrului $\alpha > 0$ pentru care are loc inegalitatea:

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq \alpha\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

pentru orice $a, b, c > 0$.

I.V. Maftei

Punctaj: **I.** 1) 4p; 2) 5p; **II.** a) 4p; b) 5p; **III.** a) 3p; b) 3p; c) 3p; **IV.** 9p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede

Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a X-a

I. **a)** Fie M o mulțime de numere reale cu cel puțin două elemente şi $f : M \to M$ o funcție care îndeplineşte condiția:

$f(f(x)) = f(x) - x, \quad (\forall) x \in M$

Să se demonstreze că f nu poate fi monotonă.

Gh. Stoica

b) Să se determine mulțimea

$A = \left\{ x \in R \mid arcctg(tgx) = \pi \cdot \left\{ \frac{1}{\pi} \cdot x \right\} \right\}$ unde am notat cu $\{y\}$ partea fracționară a numărului real y.

Costel Chiteş, Adrian Stoica

II. Pentru $a, b \in R^*$, să se determine funcția $f : R \to R$ pentru care

$f\left(x - \frac{b}{a} \right) + 2x \le \frac{a}{b} x^2 + 2\frac{b}{a} \le f\left(x + \frac{b}{a} \right) - 2x, \quad (\forall) x \in R.$

Dorin Mărghidanu

III. Se consideră funcțiile $f, g : R_+ \to R$ definite prin $f(x) = x^3 + x$ şi $g(x) = x^4 + x$.

1) Să se demonstreze că funcțiile f şi g sunt strict crescătoare.

2) Dacă $a, b \in (0, \infty)$ şi $f(a) = 3$, $g(b) = 4$ să se calculeze semnul numărului real $c = b - a$.

Sorin Rădulescu, Cristian Alexandrescu

IV. Fie ABC un triunghi şi G centrul său de greutate astfel încât:

$BC + AG = AC + BG = AB + CG$

Arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Marius Mâinea

Punctaj: **I.** a) 4p; b) 5p; **II.** a) 9p; **III.** 1) 4p; 2) 5p; **IV.** 9p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede

Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a XI-a

I. Să se determine $X \in M_2(R)$ pentru care

$$X^7 = \begin{pmatrix} 56 & 64 \\ 63 & 72 \end{pmatrix}$$

Aurel Doboşan

II. **1)** Să se demonstreze că:

$$x^3 - x^2 + \frac{4}{27} \geq 0 \quad (\forall)\, x \in [0,1].$$

2) Se consideră $A = \{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \mid x \in [0,1]\}$. Să se calculeze $\inf A$ şi $\sup A$.

Petruş Alexandrescu, Iuliana Turcu

III. Fie $A \in M_2(C)$ cu proprietatea $trA^n = trA^{n+1} = O$.

Să se demonstreze că $A^2 = O_2$.

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

IV. Se consideră funcția $f : R_+^* \to R \quad f(x) = x + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$

Să se determine $a \in R_+^*$ cu proprietatea $f(x) \geq f(a), \ (\forall)\, x \in R_+^*$.

Sorin Rădulescu, Mihail Bencze

Punctaj: I. 9p; **II.** 1) 4p; 2) 5p; **III.** 9p; **IV.** 9p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede

Ediția a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a XII-a

I. Fie $a \in (1,\infty)$. Pe $G = (0,\infty)$ se introduce următoarea lege de compoziție:

$x * y = 2\log_a \left[\left(\sqrt{a^x} - 1\right)\left(\sqrt{a^y} - 1\right) + 1\right]$, $x, y \in G$.

Să se demonstreze că:

1) Legea „*” este lege de compoziție internă pe G.

2) $(G,*)$ este grup abelian.

Aurel Doboşan, Bot Trandafir

II. Să se calculeze $\int \frac{x\sin 2x + \cos 2x}{x^3}dx$, $x \in (0,\infty)$.

I.V. Maftei, Marius Rădulescu

III. Fie I, J intervale şi $f : I \to R^*$ o funcție cu primitiva $F : I \to J$ bijectivă.

a. Să se calculeze: $\int \frac{F^{-1}(x)}{f\left(F^{-1}(x)\right)}dx$, $x \in J$.

b. Să se calculeze: $\int \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $x \in R$.

Dan Popescu

IV. Fie $n \geq 2$, $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in M_3(Z_n)$

şi $G = \{A^k \mid k \in N^*\}$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a. 3 este prim cu n

b. G cu înmulțirea este grup

S. Rădulescu, I.Savu

Punctaj: I. 1) 3p; 2) 6p; **II.** 9p; **III.** 1) 5p; 2) 4p; **IV.** 1) 4p; 2) 5p.

Notă: La fiecare problemă se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.